Тема 2. Транспортная задача.

Лекция. Постановка транспортной задачи. Методы определения опорного решения.

§1. Общая постановка задачи.

Под термином транспортная задача понимается широкий круг задач, необязательно транспортного характера. Общим для них является, как правило, распределение ресурсов, находящихся у производителей по *n* потребителям.

При планировании наиболее рациональных перевозок грузов выделяют следующие виды транспортных задач:

1. Транспортная задача по критерию стоимости перевозок.
2. Транспортная задача по критерию времени.
3. Транспортная задача на определение кратчайших расстояний по заданной сети дорог.

Транспортная задача ставится следующим образом:

Найти объемы перевозок для каждой пары поставщик - потребитель так, чтобы:

1. Мощности всех поставщиков были реализованы.
2. Удовлетворить все потребности потребителей.
3. Суммарные затраты на перевозку были минимальными.

Задача:

В 3-х пунктах отправления A_1, A_2, A_3, сосредоточен груз a_1, a_2, a_3. Этот груз следует доставить в каждый из четырех пунктов B_1, B_2, B_3, B_4 в количестве b_1, b_2, b_3, b_4. Стоимость перевозок единицы груза из i-го пункта отправления в j-й пункт назначения задана для всех комбинаций. Определить такой план перевозок, чтобы их стоимость была минимальной.

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	c_{13} x_{13}	c_{14} x_{14}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	c_{23} x_{23}	c_{24} x_{24}	a_2
A_3	c_{31} x_{31}	c_{32} x_{32}	c_{33} x_{33}	c_{34} x_{34}	a_3
Потребности	b_1	b_2	b_3	b_4	

c_{ij} - стоимость перевозок единицы продукции из *i-го* пункта отправления в *j-й* пункт назначения.

x_{ij} - количество единиц груза, отправленного из *i-го* пункта в *j-й.*

Если $\sum a_i = \sum b_j$, т.е. если объем суммарных запасов груза равен суммарному объему потребностей в этих грузах, то транспортная задача является **закрытой.** Если же эти суммы не равны, то задача называется **открытой** и в этом случае следует вводить ложный пункт отправления или назначения с нулевыми тарифами.

Система ограничений в транспортной задаче имеет вид:

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=a_1 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=a_2 \\ x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=a_3 \\ x_{11}+x_{21}+x_{31}=b_1 \\ x_{12}+x_{22}+x_{32}=b_2 \\ x_{13}+x_{23}+x_{33}=b_3 \\ x_{14}+x_{24}+x_{34}=b_4 \\ x_{ij}\ge 0 \end{cases}$$

$$Z=c_{11}x_{11}+c_{12}x_{12}+\ldots+c_{34}x_{34}\to\min$$

Данную задачу можно решить симплекс методом, но особенности модели таковы:

1. Система ограничений - есть система уравнений.
2. Коэффициенты при переменных в системе ограничений равны 1 или 0.
3. Каждая переменная входит в систему ограничений дважды.

Это позволяет разработать специальные методы решения транспортной задачи: если *m* - число пунктов отправления, а *n*- число пунктов назначения, то в общем случае уравнений будет $(m+n)$. Одно уравнение системы ограничений транспортной задачи является следствием остальных и его можно исключить. В общем случае система ограничений содержит $(m+n-1)$ уравнений с $(m+n)$ числом переменных. Эта система всегда разрешима.

Определение 1. План перевозок, обращающий в минимум суммарные транспортные издержки, называется *оптимальным планом* или оптимальным решением.

Решение транспортной задачи разбивается на 2 этапа:

1. Определение опорного решения.
2. Построение последовательных итераций, т.е. приближение к оптимальному решению.

§2. Методы построения опорного плана перевозок.

1. Метод северо-западного угла

Тарифы не учитываются. Работа начинается с левой верхней клетки таблицы.

Возможны 2 случая:

1) $\min(a_1;b_1)=a_1$ тогда $x_{11}=a_1 \Rightarrow x_{12}=x_{13}=x_{14}=0$

Для b_1 остаток равен: $b_1 - a_1$

2) $\min(a_1; b_1) = b_1$ тогда $x_{11} = b_1 \Rightarrow x_{21} = x_{31} = 0$

Для a_1 остаток равен: $a_1 - b_1$ единиц груза.

B_j / A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы
A_1	3 100	**5** **. . . . .**	7	11	~~100~~
A_2	1	4	6	3	130
A_3	5	8	12	7	170
Потребности	~~150~~ 50	120	80	50	400

$$\min(100\,;150) = 100$$

B_j / A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы
A_1	3 100	5	7	11	~~100~~
A_2	1 50	4	6	3	~~130~~ 80
A_3	5	8	12	7	170
Потребности	~~150~~ ~~50~~	120	80	50	400

$$\min(130\,;50) = 50$$

B_j / A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы
A_1	3 100	5	7	11	~~100~~
A_2	1 50	4 80	6	3	~~130~~ ~~80~~
A_3	5	8	12	7	170
Потребности	~~150~~ ~~50~~	~~120~~ 40	80	50	400

$$\min(80\,;120) = 80$$

B_j \ A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы
A_1	3 100	5	7	11	~~100~~
A_2	1 50	4 80	6	3	~~130~~ ~~80~~
A_3	5	8 40	12	7	~~170~~ 130
Потребности	~~150~~ ~~50~~	~~120~~ ~~40~~	80	50	400

$\min(170\,;40) = 40$

B_j \ A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы
A_1	3 100	5	7	11	~~100~~
A_2	1 50	4 80	6	3	~~130~~ ~~80~~
A_3	5	8 40	12 80	7	~~170~~ ~~130~~ 50
Потребности	~~150~~ ~~50~~	~~120~~ ~~40~~	~~80~~	50	400

$\min(130\,;80) = 80$

B_j \ A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы
A_1	3 100	5	7	11	~~100~~
A_2	1 50	4 80	6	3	~~130~~ ~~80~~
A_3	5	8 40	12 80	7 50	~~170~~ ~~130~~ ~~50~~
Потребности	~~150~~ ~~50~~	~~120~~ ~~40~~	~~80~~	~~50~~	400

$\min(50\,;50) = 50$

Число заполненных клеток в таблице должно быть равно $m+n-1=3+4-1=6$.

Подсчитаем стоимость полученного решения, используя формулу:

$$Z = \sum_{\substack{i=1\\ j=1}}^{\substack{m\\ n}} c_{ij} \cdot x_{ij}$$

$$Z = 100\cdot 3 + 50\cdot 1 + 80\cdot 4 + 40\cdot 8 + 80\cdot 12 + 50\cdot 7 = 2300$$

2. *Метод min элемента*

1. При составлении опорного плана перевозок методом *min* элемента в таблице заполняется клетка, которая соответствует минимальному тарифу, далее поступают как в предыдущем примере.

2. Затем заполняется клетка с *min* тарифом из оставшихся и так далее.

3. Если на определенном шаге встречается несколько клеток с равными минимальными тарифами, то выбираем ту клетку, куда можно перевезти больше продукции.

4. Если и таких клеток несколько, то выбираем ту, у которой меньше индекс *i.*

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы
A_1	3	5	7	11	100
A_2	1 130	4 …..	6 …..	3 …..	~~130~~
A_3	5	8	12	7	170
Потребности	~~150~~ 20	120	80	50	400

$$\min(130\,;150)=130$$

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы
A_1	3 20	5	7	11	~~100~~ 80
A_2	1 130	4 …..	6 …..	3 …..	~~130~~
A_3	5 …..	8	12	7	170
Потребности	~~150~~ ~~20~~	120	80	50	400

$$\min(100\,;20)=20$$

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы
A_1	3 20	5 80	7 …..	11 …..	~~100~~ ~~80~~
A_2	1 130	4 …..	6 …..	3 …..	~~130~~
A_3	5 …..	8	12	7	170
Потребности	~~150~~ ~~20~~	~~120~~ 40	80	50	400

$$\min(80\,;120)=80$$

B_j / A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы
A_1	3 20	5 80	7 …..	11 …..	~~100~~ ~~80~~
A_2	1 130	4 …..	6 …..	3 …..	~~130~~
A_3	5 …..	8	12	7 50	~~170~~ 120
Потребности	~~150~~ ~~20~~	~~120~~ 40	80	~~50~~	400

$$\min(170\,;50)=50$$

B_j / A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы
A_1	3 20	5 80	7 …..	11 …..	~~100~~ ~~80~~
A_2	1 130	4 …..	6 …..	3 …..	~~130~~
A_3	5 …..	8 40	12	7 50	~~170~~ ~~120~~ 80
Потребности	~~150~~ ~~20~~	~~120~~ ~~40~~	80	~~50~~	400

$$\min(120\,;40)=40$$

B_j / A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы
A_1	3 20	5 80	7 …..	11 …..	~~100~~ ~~80~~
A_2	1 130	4 …..	6 …..	3 …..	~~130~~
A_3	5 …..	8 40	12 80	7 50	~~170~~ ~~120~~ ~~80~~
Потребности	~~150~~ ~~20~~	~~120~~ ~~40~~	~~80~~	~~50~~	400

$$n+m-1=6$$

$$Z_2=20\cdot3+80\cdot5+130\cdot1+40\cdot8+80\cdot12+50\cdot7=2220$$

В общем случае, нельзя сказать, какой план перевозок ближе к оптимальному. Чаще оказывается ближе *метод min элемента*.

Контрольные вопросы для самоконтроля

1. Дать текстовую формулировку транспортной задачи.
2. Записать математическую модель транспортной задачи.
3. Сформулировать необходимые и достаточные условия разрешимости ТЗЛП.